

14/10/16

Πρόταση

Όταν η συνάρτηση απώλειας είναι το τετραγωνικό σφάλμα τότε $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$

Απόδειξη

$$R(\theta, d) \leq E L(\theta, d) \stackrel{\text{note}}{=} E (d - \theta)^2$$

γνωρίζουμε ότι $\text{Var} X = E X^2 - (E X)^2 \Rightarrow E X^2 = \text{Var} X + (E X)^2$

$$\begin{aligned} R(\theta, d) &= \text{Var}(d - \theta) + (E(d - \theta))^2 \\ &= \text{Var} d + (E d - \theta)^2 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var} X \\ E(aX + b) = a E X + b \end{array} \right)$$

Η ποσότητα $E d - \theta$ ονομάζεται ποσό μεροληψίας. Όταν το $E d < \theta$ έχουμε υποεκτίμηση, όταν $E d > \theta$ έχουμε υπερεκτίμηση. Όταν $E d = \theta$ τότε λέμε ότι ο εκτιμητής μας είναι αμερόληπτος εκτιμητής του παραμέτρου θ .

Παράδειγμα

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ε.δ. από την $N(\theta, \sigma^2)$, θ άγνωστον παράμετρος, $\theta \in \mathbb{R}$ και σ^2 γνωστό. Θεωρή ποσότητα. Να υπολογιστεί

α) το μέσο ε.σ. του $\bar{X}$

β) το ~~από~~ η συνάρτηση κινδύνου με συνάρτηση απώλειας το απόλυτο σφάλμα του $\bar{X}$

α) Δείξτε να υπολογιστεί το $E(\bar{X} - \theta)^2 \stackrel{\text{note}}{=} \text{Var} \bar{X} + (E \bar{X} - \theta)^2$

$$\text{Var} \bar{X} = \text{Var} \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum \text{Var} X_i = \frac{1}{n^2} \sum \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E \bar{X} = E \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1}{n} \sum E X_i = \theta$$

$$\text{Άρα } E(\bar{X} - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

(Πίθανος): αν $X_1, \dots, X_n$ ε.δ. με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\text{άρα } E(\bar{X}) = \mu, \text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

β) $R(\theta, d) = E L(\theta, d)$ με $L(\theta, d) = |\bar{X} - \theta|$

$$E |\bar{X} - \theta| = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{x} - \theta| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \right)^{1/2} e^{-1/(2\sigma^2/n)(\bar{x} - \theta)^2} d\bar{x} \quad \text{Δείξτε } \bar{X} - \theta = Z$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |z| (2\pi\sigma^2/n)^{-1/2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} z^2} dz$$

$$= 2 \int_0^{\infty} z (2\pi\sigma^2/n)^{-1/2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} z^2} dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{nn}} \sigma$$

Παράδειγμα

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ i.i.d. από $B(1, \theta)$

$f(x, \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$

α) Να αποδείξει το ΜΤΣ του $\bar{X}$

β) Να βρει ένα άνω φράγμα για το ΜΤΣ του $\bar{X}$ και να σχολιάσει

$$a) E(\bar{X} - \theta)^2 = \text{Var } \bar{X} + (E(\bar{X}) - \theta)^2$$

$$= \sigma^2/n + (\psi - \theta)^2, \text{ όπου } \sigma^2 \text{ η διακύμανση των } Y_i \text{ και } \psi \text{ η μέση τιμή των } Y_i$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{n} + (\theta - \theta)^2 \quad (\text{αυτή } B(1, \theta) \text{ είναι } E Y_i = 1 \cdot \theta, \text{Var } Y_i = 1 \cdot \theta(1-\theta))$$

$$\beta) \text{ θεωρή } g(\theta) = \theta - \theta^2 (= \theta(1-\theta))$$

$$g'(\theta) = 1 - 2\theta \Rightarrow g'(1/2) = 0 \quad \left. \vphantom{g'(\theta)} \right\} \text{ 1/2 μέγιστο}$$

$$g''(\theta) = -2 < 0$$

$$\text{άρα } \frac{\theta(1-\theta)}{n} \leq \frac{g'(1/2)}{n} = \frac{1}{4n}$$

Ορισμός

$T(x)$ αφερόμενος ως $g(\theta)$ αν $E T(x) = g(\theta)$

Παρατήρηση

1) Κάθε $\sigma\sigma$ είναι αφερόμενος εκτίμητής της μέσης τιμής του

2) Αφερόμενος εκτίμητής του πληθυσμιακού μέσου τιμής είναι η δείγματική μέση τιμή και έχει διακύμανση σ^2/n

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. από έναν πληθυσμό με $E X_i = \mu$, $\text{Var } X_i = \sigma^2$

Τότε $E \bar{X} = \mu$ και $\text{Var } \bar{X} = \sigma^2/n$

Πρόταση

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ ε.δ., $n \geq 2$ από έναν πληθυσμό με $E x_i = \mu$, $\text{Var } x_i = \sigma^2$
Τότε: α) αν μ γνωστή ποσότητα $T(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ αφερόμενος ως σ^2
β) αν μ άγνωστη ποσότητα $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ αφερόμενος ως σ^2

Απόδειξη

α) αρκεί ν.δ.ο $E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] = \sigma^2$

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var } x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2$$

β) $E(S^2) = E \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] = \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] =$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i\bar{x} + n\bar{x}^2$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$\Rightarrow E(S^2) = \frac{1}{n-1} \left[E \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n E \bar{x}^2 \right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E x_i^2 - n (\text{Var } \bar{x} + (E \bar{x})^2) \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (\text{Var } x_i + (E x_i)^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right] = \frac{1}{n-1} (n(\mu^2 + \sigma^2) - \sigma^2 - n\mu^2)$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Πρόταση

α) Έστω $T(x)$ αφερόμενος εκτίμητής του $g(\theta)$ και a, b σταθερές (δεν εξαρτώνται από το θ)

Τότε $aT(x) + b$ αφερόμενος ως $ag(\theta) + b$

β) Έστω $T_i(x)$ αφερόμενος ως $g_i(\theta)$, $i=1, \dots, k$ και a_i σταθερές

Τότε $a_1 T_1(x) + \dots + a_k T_k(x)$ αφερόμενος ως $a_1 g_1(\theta) + \dots + a_k g_k(\theta)$

Απόδειξη

α) δίδω ν.δ.ο $aT(x) + b$ αφερόμενος ως $ag(\theta) + b$

αρκεί ν.δ.ο $E(aT(x) + b) = ag(\theta) + b$

$E(aT(x) + b) = aET(x) + b = ag(\theta) + b$, αφού $T(x)$ αφερόμενος ως $g(\theta)$

β) $E(a_1 T_1(x) + \dots + a_k T_k(x)) = a_1 ET_1(x) + \dots + a_k ET_k(x) = a_1 g_1(\theta) + \dots + a_k g_k(\theta)$

Πρόταση

Το σύνολο των αφερόλυπων εκτιμήσεων μιας παραμετρικής συνάρτησης του θ είναι είτε κενό, είτε μονοσύνολο, είτε $\mathbb{R}^n$ αριθμητικό.

Απόδειξη

Έστω T_0, T_1 δύο αφερόλυποι εκτιμητές του $g(\theta)$.

Τότε $\forall a \in [0,1]$ ο $aT_0 + (1-a)T_1$ είναι αφερόλυπος του $g(\theta)$ διότι
 $E[aT_0 + (1-a)T_1] = aE[T_0] + (1-a)E[T_1] = ag(\theta) + (1-a)g(\theta) = g(\theta)$

Ξεκινώντας από δύο αφερόλυπους εκτιμητές καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένα $\mathbb{R}^n$ -αριθμητικό σύνολο αφερόλυπων εκτιμήσεων.
Αν τώρα δεν υπήρχαν δύο αφερόλυποι εκτιμητές, τότε ή δεν υπάρχει κανένας ή υπάρχει μόνο ένας.

Παράδειγμα

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ από $B(1, \theta)$, $f(x_i, \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$, $x_i = 0, 1$

Μπορεί να προσδιοριστεί αφερόλυπος εκτίμηση του $\theta^{n+1} \frac{\theta}{1-\theta}$?

$T(x)$ αφερόλυπος του $g(\theta)$, $E(T(x)) = g(\theta)$

$$E(T(x)) = \sum_x T(x) t_x(x)$$

$$f_x(x) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n - \sum x_i}, \quad x_i = 0, 1$$

$$\text{άρα } E(T(x)) = \sum_x T(x) \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n - \sum x_i}, \quad x_i = 0, 1$$

Παρατηρώ ότι $\sum x_i$ δύναται αλεί 0, 1, ..., n

άρα έχουμε πολυώνυμο ως προς θ ως πολυ ή βαθμού

άρα $E(T(x)) = g(\theta) = (a_0 + a_1\theta + \dots + a_n\theta^n)$ άρα δεν μπορεί να προσδιοριστεί αφερόλυπος ως θ^{n+1} και ως $\frac{\theta}{1-\theta}$

Παράδειγμα

Έστω X μια παρατήρηση από την Poisson κατανομή με παράμετρο θ , $X \sim P(\theta)$, $f(x, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός εκτιμητής αμερόληπτου της παραμέτρου θ

$EX = \theta$, άρα X αμερόληπτου της θ

Έστω $T(x)$ μια συνάρτηση του X ζω $ET(x) = \theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} = \theta \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\theta^x}{x!} = \theta e^{\theta}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\theta^x}{x!} = \theta \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^x}{x!} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^{x+1}}{x!}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\theta^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\theta^x}{(x-1)!}$$

$$\text{Οπότε } T(0) = 0, x=1, 2, \dots, \frac{T(x)}{x!} = \frac{1}{(x-1)!} \Rightarrow T(x) = \frac{x!}{(x-1)!} = x$$

άρα το X μοναδικός αμερόληπτου της θ

Ορισμός

Μια απόφαση d_1 είναι ισοδύναμη με μια απόφαση d_2 , αν

$$R(\theta, d_1) = R(\theta, d_2) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Η d_1 είναι καλύτερη από το d_2 αν $R(\theta, d_1) \leq R(\theta, d_2) \quad \forall \theta$

και $R(\theta, d_1) < R(\theta, d_2)$ για κάποιο θ

Ορισμός

Ένας εκτιμητής λέγεται παραδοτικός αν δεν υπάρχει καλύτερός του

Πρόταση

Με βάση το πρώτο τετακτοποιημένο σφάλμα δεν υπάρχει βέλτιστος εκτιμητής του μη σταθερού παραμετρικού συνάρτησης $g(\theta)$